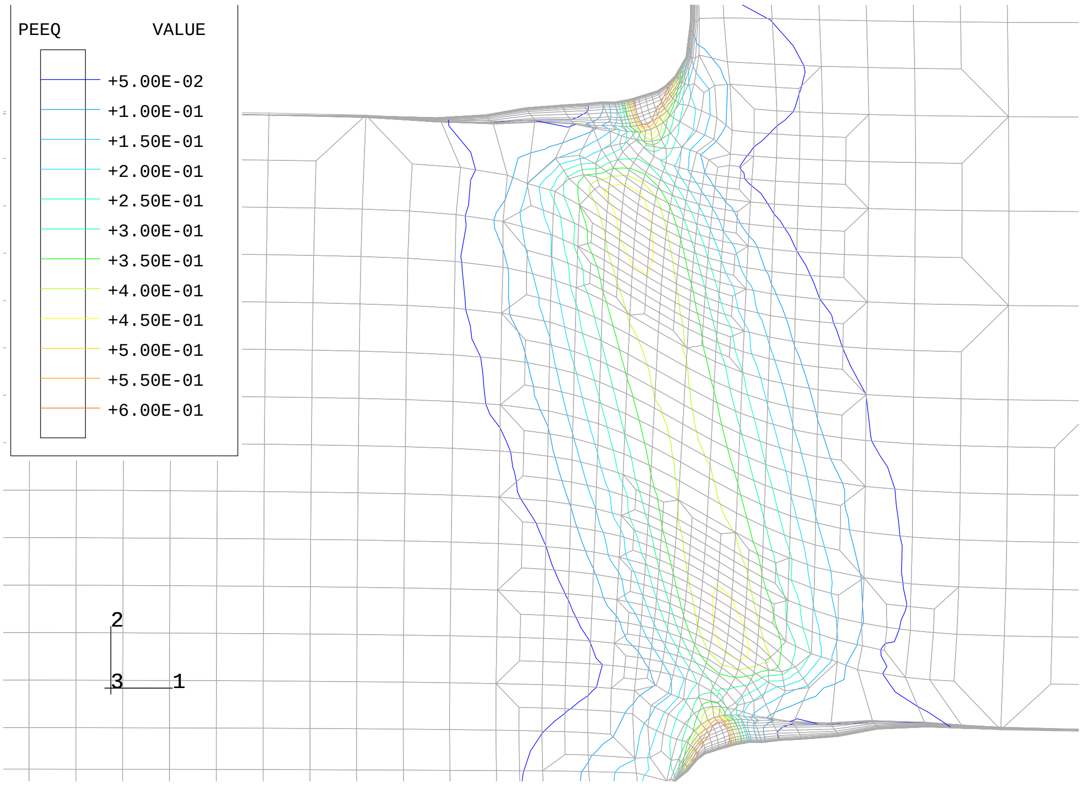
Numerische Modellierung Thermoplastischer Instabilitäten

von Hagen Lorenz



Finite-Elemente-Modell Scherprobe (ε^{pl}), Beginn der Lokalisierung

Kapitel 1

Adiabatische Scherbänder

1.1 Arbeitshypothese: Adiabatisches Scherband[1] als "dissipative Struktur"

Ein adiabatisches Scherband stellt ein System fern vom thermodynamischen Gleichgewicht dar. Es ist ein auf drei Strukturebenen selbstähnliches Gebilde. Auf der makroskopischen Ebene ist sie für das blose Auge als Verformungslokalisierung sichtbar. Auf der mesoskopischen Ebene kommt es durch Evolution der mikroskopischen Struktur (Systeme von Versetzungen, Orientierungsentfestigung etc.) zur Ausbildung von Mikrobändern o.ä. Auf der Strukturebene des Kristall-Gitters bewegen sich Versetzungen in separaten Gleitebenen, wobei es hier zu der eigentlichen Wärmeproduktion kommt. Je kleiner die Breite der jeweiligen Struktur ist, desto größer ist die auf die Struktur bezogene plastische Dehnrate (dies folgt schon aus der hierarchischen Zusammensetzung der Gesamtstruktur). Entsprechend steigt die pro Volumen und Zeit dissipierte Wärme und damit der zeitliche Anstieg der Temperatur - soweit dieser nicht durch Wäremeleitung abgeschwächt wird. (Auch die Bildung von Versetzungsstrukturen, welche die Verformung hemmen, nimmt mit steigender Dehnrate zu. Mit steigender Temperatur nimmt aber auch deren Relaxation zu, und Subkörner können sogar in einem energetisch günstigeren Zustand rekristallisieren.)

Ein kontinuumsmechanischer Ansatz geht mit der Vorstellung eines homogenisierten Materials einher. Dazu müssen Störungen oder Fluktuationen der Zustandsgrößen durch Mechanismen (z.B. Verfestigung, Wärmeleitung) ausgeglichen werden, welche den Störungen entgegenwirken. Bei einer thermoplastischen Instabilität ist dies aber effektiv nicht mehr gegeben, so dass Fluktuationen sich auf der jeweiligen Strukturebene verstärken und zur Ausbildung von Nichtgleichgewichts-Strukturen führen. Das heißt: das Produkt von Dehnrate und Breite der jeweiligen Struktur ist größer als die Ausbreitungsgeschwindigkeit der Temperaturstörung. Hinzu kommt allerdings das Problem, dass ein Fehlen des thermodynamischen Gleichgewichts auf der untersten Ebene das Fehlen einer eindeutig definierten Temperatur nachsichzieht.

Eine weiterhin zu beantwortende Fragestellung wäre, auf welcher Strukturebene es zu dem beobachteten finalen Versagen kommt.

[1] Adiabatische Zustandsänderungen im ursrünglichen thermodynamischen Sinn sind quasistatisch und somit reversibel. Solche Prozesse müssen also langsam ablaufen im Vergleich zu den für die Einstellung des inneren Gleichgewichts verantwortlichen Prozessen (siehe: L. D. Landau, E. M. Lifschitz: Lehrbuch der Theoretischen Physik, Band V, § 11, Akademie-Verlag, Berlin, 1979). Auf die Lokalisierung von Scherdeformationen bezogen wird nur das zweite Merkmal adiabatischer Zustandsänderungen; dass sie andererseits so schnell ablaufen, dass es nicht zu einem Austausch von Wärme mit der Umgebung (und damit zu einer reversiblen Änderung der Entropie) kommt.

1.2 Instabilität des Materialverhaltens

Instabiles Verhalten eines mechanischen Systems kann verschiedene Ursachen haben. Eine Ursache liegt schon im geometrisch zugelassenen Verformungsmodus. Beim Zugversuch muss ein sich plastisch verhaltendes Material eine gewisse Verfestigung $h > 0$ aufweisen, um der Einschnürung infolge Querkontraktion entgegenwirken zu können. Reicht die Verfestigung nicht aus, kommt es zu einem Zusammenbruch der Tragfähigkeit der Struktur. Bei einem idealen Druckversuch wäre eine Instabilität kaum möglich, da die Querschnittsvergrößerung die Materialentfestigung $h < 0$ fast beliebig kompensieren kann. Ein Scherversuch stellt dagegen einen geometrisch neutralen Verformungsmodus dar. Es tritt keine Querkontraktion auf. Auch ist die Bezugslänge (l_0) für die Randverschiebungen konstant und der räumliche Verzerrungstensor eine lineare Funktion jener Verschiebungen. Da Scherbänder im großen und ganzen nur Scherdeformationen (γ) aufweisen, findet man hierin auch ein geeignetes Objekt zum Studium einer materialbedingten Instabilität, welche zunächst frei von geometrischen Einflüssen auf das Stabilitätsverhalten erscheint.

Genau betrachtet beinhaltet das Problem einer plastischen Instabilität zwei verschiedene Formen von Instabilität, wobei die zweite Form durch die erste (die Materialinstabilität) ermöglicht wird. Die Folge des entfestigenden Materialverhaltens ist, dass eine kleine, räumlich inhomogene Störung (einer Verformung mit homogener Verformungsgeschwindigkeit) unbegrenzt anwachsen kann. Dies führt zu einer lokalen Konzentration der Verformung, die kaum noch durch äußere Bedingungen kontrolliert werden kann.

Intuitiv hat sicher jeder einen Begriff von *Stabilität*. Was man aber im genauen, mathematischen Sinn unter Stabilität versteht, hängt allgemein betrachtet nicht nur vom jeweiligen Problem sondern auch von der Betrachtungsweise ab. Auch allein auf dem Gebiet mechanischer Strukturen existiert heute keine vollständige Theorie der Stabilität. [Z.P. Bazant: Stability of elastic, anelastic and disintegrating structures, and finite strain effects: An overview. Chapter 2.02 in: Comprehensive Structural Integrity, Vol. 2. Fundamental theories and mechanisms of failure, I. Milne, R.O. Ritchie and B. Karihaloo, eds., Elsevier (Pergamon), Amsterdam, 2003, S. 47-80]

Nach DIRICHLET (1846, das sog. LAGRANGE-DIRICHLET-Konzept der Stabilität) ist ein mechanisches System stabil, wenn eine verschwindend kleine Auslenkung aus der Gleichgewichtslage mit kleiner Anfangsgeschwindigkeit dazu führt, dass sich das System im Laufe der Zeit nicht über enge Grenzen von der Gleichgewichtslage entfernen wird. RIEMANN griff DIRICHLETs Überlegungen im Zusammenhang mit dem Energie-Kriterium für Stabilität auf in: “Ein Beitrag zu den Untersuchungen über die Bewegung eines flüssigen gleichartigen Ellipsoides”, 1861. Das Energie-Kriterium für die Stabilität eines konservativen Systems fordert als notwendige und hinreichende Bedingung, dass die potentielle Energie ein Minimum hat bei virtuellen Verschiebungen (welche die kinematischen Randbedingungen erfüllen) aus der Gleichgwichtslage. Verschwindet die erste Variation, wobei aber kein Minimum vorliegt, dann ist der Zustand labil, “es lassen sich dann immer beliebig kleine Änderungen des Zustands der flüssigen Masse angeben, welche eine völlige Änderung desselben zur Folge haben.” Damit verallgemeinert RIEMANN Lage und Geschwindigkeit als “Zustand”. Eine weitere begriffliche Verallgemeinerung gab LJAPUNOV (1893), in dem er für eine gegebene Gleichgewichtslösung für ein (abstraktes) mechanisches System forderte, dass alle möglichen *kleinen* Störungen der Anfangsbedingungen nur zu *kleinen* Änderungen der Lösung führen können. Mit Anfangsbedingungen ist gemeint, dass man einen erreichten Zustand als Ausgangspunkt betrachtet.[2]

Das Energie-Kriterium ist zwar eine hinreichende Bedingung, jedoch nach späteren Erkenntnissen über dynamische Systeme nicht unbedingt als alleiniger Prüfstein für Stabilität geeignet. Zumindest bezeichnet aber HILL in “A general theory of uniqueness and stabillity in elastic-plastic solids”, J. Mech. Phys. Solids, Vol. 6, 1958, S. 236-249, das Energie-Kriterium als den allgemeinsten Standpunkt, um die Frage der Stabilität zu untersuchen. Bei vielen Systemen geht Instabilität

[2] Das Problem, eine Definition des Begriffs “Stabilität” anzugeben, liegt vielleicht in der prinzipiellen Schwierigkeit, eine real existierende Klasse von Phänomenen mathematisch abstrakt zu formalisieren.

einher mit einer Freisetzung von gespeicherter (potentieller) Energie.

Zum Beispiel könnte in Zirkusartist einen Stuhl theoretisch so balancieren, dass dieser, auf einem Bein stehend, im Gleichgewicht ruht. Jedoch wäre dieser Zustand nicht stabil, denn die winzigste Störung würde den Stuhl umkippen lassen. (Der Artist kann den Stuhl balancieren, weil er jede Störung durch eine kleine Bewegung ausgleicht. Seine von außen einwirkende Aktivität bewirkt eine minimale Entropieproduktion des mechanischen Systems, das System ist quasistatisch. Man könnte den Artisten auch durch einen Roboter ersetzen, der durch optimale Informationsverarbeitung seine eigene Aktivität minimieren kann.) Im Falle eines stabilen Zustands (z.B. ein Stuhl, der an einem Bein aufgehängt ist), bei dem jeder Auslenkung durch eine Gegenkraft entgegengewirkt wird, ist eine künstliche Stabilisierung nicht notwendig. Unter Bedingungen, bei denen geometrische Konfigurationen keine Rolle spielen, weisen Metalle und auch andere Stoffe anfänglich einen Zustand auf, der stabil gegenüber äußeren Einwirkungen ist.

Wird ein Körper aus dem statischen Gleichgewicht gebracht, so kann dies nicht nur zu reversiblen elastischen Verformungen führen. Es können auch irreversible Prozesse einsetzen, die mit einer Änderung der inneren Struktur verbunden sind. Dann wird auf mikroskopischer Ebene potentielle Energie freigesetzt, was beispielsweise zur gerichteten Bewegung von Versetzungen führen kann.[3] Solche irreversiblen Prozesse können auf makroskopischer Ebene nur in eine Richtung ablaufen, da die für eine gerichtete Bewegung nötigen Spannungen dabei abgebaut werden. Allgemein soll deswegen das "Prinzip der maximalen plastischen Dissipation" gelten: bei einer vorgeschriebenen Verformung ε stellen sich die Spannungen σ so ein, dass innerhalb der erreichten Fließbedingung die Arbeit der äußeren Kräfte maximal ist. [R. von Mises: "Mechanik der plastischen Formänderung von Kristallen", Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik 8(1928), S. 161-195] Erhöht sich andererseits bei der plastischen Verformung die Vergleichsspannung, so wählt das Metall (insofern es dazu in der Lage ist) einen minimalen Verformungsweg, auf welchem eine plastische Arbeit geleistet wird, infolge derer sich die Fließspannung bis zur anliegenden Verlgeichsspannung erhöht. Wir gehen hier in erster Linie von VON-MISES-Plastizität aus, bei welcher die Fließbedingung dem plastischen Potential entspricht (assoziiertes Fließen) und sich somit die Fließrichtung als Gradient der Fließbedingung im Spannungsraum ergibt. Diese Annahme bietet den Vorteil, dass sich Eindeutigkeits- und Extremal-Theoreme leichter gewinnen lassen. [R. Hill: "The Mathematical Theory of Plasticity", Oxford University Press, Oxford, 1950] Jedoch ist sie nicht unbedingt notwendig - für das "Prinzip der maximalen plastischen Dissipation" ist lediglich entscheidend, dass die Richtung des Dehnungsinkrements parallel zum herrschenden Spannungszustand ist.

Es ist aber auch ein entgegengesetztes Verhalten möglich, bei dem zwar auch das "Prinzip der maximalen plastischen Dissipation" gilt; da dies jedoch auch eine maximale Dissipation in Verformungswärme bedeutet, kann das Material beim Überwiegen der thermischen Entfestigung einen Verformungsweg nehmen, bei dem eine maximale Abnahme der Vergleichsspannung stattfindet. Dies führt zu einer maximalen Instabilität.

Mit der Fließregel nach VON MISES liegt ein symmetrischer Steifigkeitstensor vor. Hier geht eine Instabilität immer nur mit einem äußeren, makroskopischen Verhalten einher, bei dem die Fließspannung nicht mehr mit der äquivalenten plastischen Dehnung ansteigt (Entfestigung, $h = \frac{\partial \sigma}{\partial \varepsilon^{pl}} < 0$). Mathematisch ist dies äquivalent mit einem nicht mehr positiv definiten Steifigkeitstensor. Wie von VAN DER GIESSEN und DE BORST (Introduction to Material Instabilities in Solids, Wiley, 1998) betont wird, führt dies zu allererst nicht zu struktureller Instabilität sondern zum Verlust der Elliptizität der für ein Randwertproblem bestimmenden partiellen Differentialgleichungen (bei dynamischen Problemen verliert das System seine Hyperbolizität). Die Elliptizität ist widerum notwendig dafür, dass ein korrekt gestelltes (well-posed) Problem vorliegt. Das heißt, dass eine eindeutige Lösung existiert, die kontinuierlich von den Eingangsgrößen abhängt. Somit ist es auch ausgeschlossen, dass ein verschwindend geringer Fehler in den Daten zu einer schlagartigen

[3] Versetzungen können zwar auch spontan infolge thermodynamischer Fluktuationen migrieren - sind jedoch keine Gradienten von Energie oder Konzentration vorhanden, bleiben dies reversible Vorgänge.

Änderung in der Lösung führt. (Jedoch muss dies nicht heißen, dass die Lösung stabil ist und auf längere Zeit von dem Fehler unbeeinflusst bleibt.)

Fazit: bei gewöhnlichem plastischem Materialverhalten bedeutet eine Materialinstabilität immer das Vorliegen eines nicht korrekt gestellten Problems.

1.3 Einfluss des Materialmodells auf mögliche Lösungen

In vielen Veröffentlichungen wird die fehlende "well-posedness" dafür verantwortlich gemacht, dass 2D- oder 3D-Finite-Elemente-Rechnungen netzabhängige Lösungen liefern, welche entsprechend unrealistisch sind. Allerdings kann man durch unterschiedliche Vorgehensweisen, beispielsweise die Hinzunahme einer Dehnraten-Abhängigkeit der Fließspannung, die "well-posedness" gewährleisten. Die DGl.en erhalten dann zusätzliche Ableitungen 3. Ordnung, wobei vor diesem Term ein beliebig kleiner Faktor stehen kann, der ausreicht, um das Problem zu "regularisieren" (dieser Begriff wird hier häufig verwendet, obwohl nicht unbedingt klar ist, was für ein Operator dabei die Eigenschaft der Regularität erfüllen soll). Trotzdem ändert sich damit nicht unbedingt etwas Grundlegendes an der Lösung. Vielmehr findet man auch hier netzabhängiges Verhalten. Dies kann daran liegen, dass das Netz die exakte Lösung (möglicherweise um Größenordnungen in der Ortsauflösung) nicht auflösen kann. Zumindest in bestimmten Fällen, bei denen sich "Scherbänder" entlang von in einer Reihe liegenden Elementen ausbreitet, ist Netzabhängigkeit die Folge einer reduzierten Elementformulierung. Andererseits findet man auch bei groben Netzen und fehlender "well-posedness" Lösungen, die durchaus den experimentellen Beobachtungen entsprechen - die Übereinstimmung ist dann nur eine Frage der gewählten Materialparameter.

Dass die Regularisierungsprozedur eher eine formale Korrektur darstellt, kann man schon daran erkennen, dass ein bliebig kleiner Faktor vor dem regularisierenden Term ausreicht. Der resultierende Effekt kann im Punkt des sonst eintretenden Verlustes der Elliptizität vernachlässigbar klein sein und erst dann überhaupt eine Rolle spielen, wenn hohe Änderungsraten eintreten - also dann, wenn die Lösung einer Singularität zuzustreben scheint.

1.4 Wann ist ein Problem "korrekt gestellt"?

Auf einen ähnlichen Sachverhalt trifft man bei der Frage, ob es einen Sinn hat, in einer statischen Analyse, in deren Gleichgewichtsbedingung also kein Trägheitsterm enthalten ist, überhaupt ein korrekt gestelltes Problem zu sehen. Zum Beispiel kann man für einen Eulerschen Lastfall zwar Bedingungen angeben, wann die Lösung nicht mehr kontinuierlich von den Eingangsgrößen abhängt und außerdem in dem Zusammenhang ein Verlust der Eindeutigkeit der Lösung eintritt. Eine solche Lösung wäre dann eine von mehreren möglichen. Im Fall einer Instabilität (Überschreitung der maximalen Tragfähigkeit) unter konstanter Last ist sogar überhaupt keine Lösung mehr angebbar. Es bleibt dann die Frage offen, welche "Lösung" real eintritt.

HILL hat 1950 gezeigt, dass bei einem elastisch-plastischen Problem im statischen Fall aus der Eindeutigkeit der Lösung auch deren Stabilität folgt. Entsprechend folgt bei einem instabilen Zustand der Verlust der Eindeutigkeit. Aus folgenden Gründen kann man einem solchen statischen Problem, aber auch bestimmten dynamischen Problemen keine physikalische Relevanz bescheinigen.

Ein real in der Natur ablaufender (d.h. physikalischer und nicht nur rein abstrakter) Vorgang ist dadurch gekennzeichnet, dass infolge von Ursachen stets eine, und zwar genau eine einzige, (makroskopische) Reaktion vorhanden ist. (Allgemein betrachtet, bildet erst die Gesamtheit aller notwendigen Ursachen den zureichenden Grund für die tatsächliche Existenz.) Da Differentialgleichungen i. allg. eine unendliche Menge möglicher Lösungen besitzen, müssen diese z.B. durch Hinzunahme von Anfangs- oder Randbedingungen auf eine einzige Lösung eingeschränkt werden.

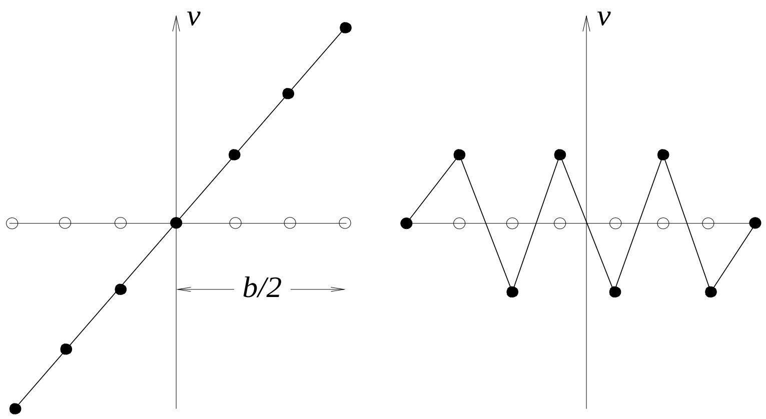
Damit ein mathematisches Modell ein physikalisches System sinnvoll beschreibt, muss man an die Lösungen aus dem Modell eine weitere Bedingung stellen. In der Realität wird man nie die Rand- und Anfangsbedingungen mathematisch exakt angeben können. Deswgen betrachtet man gewöhnlich die kontinuierliche Abhängigkeit der Lösung von den Eingangsgrößen als eine notwendige Bedingung - somit ist ausgeschlossen, dass eine beliebig kleine (im Rahmen der benötigten Genauigkeit unvermeidbare) Änderung der Bedingungen eine qualitative Änderung der Lösung zur Folge hat. Man geht i. allg. auch davon aus, dass derartiges in der Realität nicht auftritt. Sofern man von der Gültigkeit des Kausalgesetzes ausgeht, hat alles, was existiert, einen Grund, aus dem es zwingend hervorgeht. Verschwindet also die Ursache, muss auch die Wirkung verschwinden. G. W. LEIBNIZ meinte in seinen "Neuen Abhandlungen über den menschlichen Verstand" dazu, "... daß die Natur niemals Sprünge macht".

I. G. PETROVSKY (1954) und S. L. SOBOLEV (1964) verwendeten für die o.g. Bedingungen die Bezeichnungen "vernünftig" bzw. "korrekt gestellt". Beide Termini gehen wahrscheinlich auf J. HADAMARD's (1923) Konzept des "well-posed problem" zurück [R. J. Knops, E. W. Wilkes: "Theory of Elastic Stability", in: S. Flügge: Handbuch der Physik VIa/3]. Dieses beinhaltet drei Bedingungen, wonach eine Lösung: a) existiert, b) eindeutig ist und c) kontinuierlich von den Eingangsgrößen abhängt.

1.4.1 Cauchy-Problem der Laplace-Gleichung

HADAMARD stellte erstmals 1917 das nicht korrekt gestellte Cauchy-Problem der Laplace-Gl. $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$ mit Anfangswerten ($t = 0$: $u(0,x) = 0$; $u'_t(0,x) = \frac{1}{n^k} \sin nx$; mit n, $k \in N$, > 0) vor. Die Gleichung hat eine (durch die vorgegebenen Anfangsbedingungen eindeutig bestimmte) Lösung $u(t,x) = \frac{1}{n^{k+1}} \frac{e^{nt} - e^{-nt}}{2} \sin nx$. Eine solche Lösung kann auch als lineare Störung einer bereits gefundenen Lösung bertrachtet werden. Diese hat aber die Eigenschaft, dass eine beliebig kleine Störung (man lasse $n \to \infty$ gehen) der Anfangsbedingungen bzw. deren Ortsableitungen eine nicht beschränkte Änderung der Lösung zur Folge haben kann. Der gestörte Lösungsanteil wächst exponentiell mit der Zeit an, wobei der Faktor im Exponenten die räumliche Wellenzahl der Störung ist. Da rein mathematisch die Wellenzahl nicht beschränkt ist, kann auch die Störung in einem beschränkten Zeitintervall unbeschränkt wachsen.

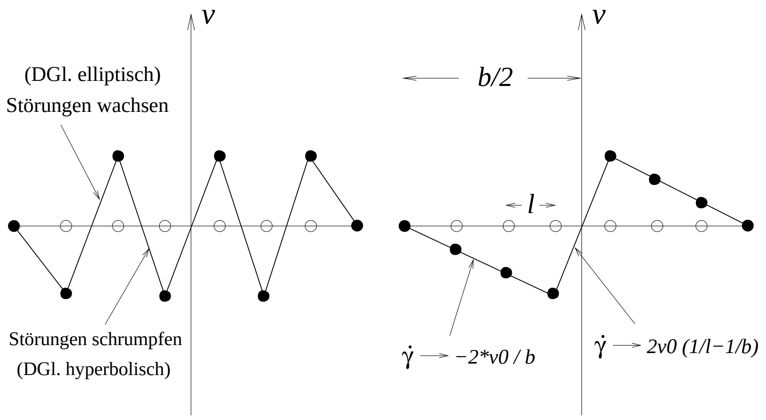
Bei der eindimensionalen Verformung eines linear entfestigenden elasto-plastischen Materials trifft man (bis auf eine lineare Achsen-Transformation) genau auf die oben genannte partielle DGl.: $\frac{3G+h}{c_g^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - h \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$, ($h < 0, G \gg |h|, c_g = \sqrt{\frac{G}{\rho}}$), mit Anfangs- und zusätzlich Randbedingungen. Die Randbedingungen schränken dabei die möglichen Lösungen ein, was aber nichts an dem beschriebenen Phänomen ändert. In der numerischen Behandlung wird u.a. eine Ortsdiskretisierung durchgeführt. Dies führt allerdings dazu, dass mit den kleinsten Netzabständen auch die auftretenden Wellenzahlen begrenzt werden. Man hat auf diese Weise bei einem festgelegten Netz im Prinzip wieder ein korrekt gestelltes Problem vorliegen, da mit verschwindender Störung auch immer die Änderung der Lösung verschwindet - nur wird die Lösung an entscheidender Stelle vom Netz abhängig sein. Es wachsen nämlich genau jene Störungen, deren Wellenlänge zwei kleinsten Elementlängen entspricht, mit der schnellsten Rate (exponentiell mit der Zeit) an. Das Ergebnis ist eine Lokalisierung der Verformung auf etwa ein einziges Element.



homogene Lösung　　Störung mit max. Wellenzahl

Somit wäre nicht nur eine Erklärung für die Netzabhängigkeit numerischer Lösungen gegeben, sondern auch für eine prinzipiellere Frage. Denn bis dahin lag kein Grund vor, wieso zwar das nicht korrekt gestellte Problem in empfindlichster Weise von etwaigen Störungen abhängig ist, aber die zwangläufig fehlerbehaftete numerische Lösung immer auf ein ähnliches Ergebnis hinausläuft.

Allerdings würde mathematisch korrekt keine Lokalisierung auf ein Element erfolgen, sondern im Prinzip auf alle Elemente. Dabei würde abwechselnd eine positive oder negative Scherung stattfinden, wobei die Amplitude unbegrenzt anwachsen würde. Hier tritt eine Unzulänglichkeit zu Tage, die bei der Definition des Materialverhaltens begangen wurde. Es wurde nämlich davon ausgegangen, dass im gesamten Lösungsbereich die Verformung in nur einer Richtung erfolgt. Das Verhalten im Entlastungsfall wurde somit in der DGl. nicht berücksichtigt. In diesem Fall wird die DGl. wieder hyperbolisch. D.h., dass die Amplitude von Wellenbergen zeitlich abnimmt, und zwar stärker mit zunehmender Wellenzahl. Bei zumindest moderater Entfestigung, wie bei der thermischen Entfestigung der Fall, hat die Beschleunigung, die sich aus der Krümmung der Auslenkung (zweite Ortsableitung) berechnet, einen wesentlich höheren Betrag im elastischen Fall: $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c_g^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ als im plastischen: $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{h}{3G} c_g^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$. Die Störungen werden also eher zeitlich abnehmen als wachsen. Übrig bleibt eine positive Flanke im mittleren Element, welche zusammen mit der homogenen Lösung maximal die von den Randbedingungen vorgegebene Geschwindigkeitsdifferenz annehmen kann. In den übrigen Elementen geht die effektive Scherrate gegen Null.



periodische Störung　　Lokalisierung auf ein Element

1.4.2 Regularisierung des Problems

Wie bereits erwähnt, ist das Problem wieder korrekt gestellt, wenn viskoses Materialverhalten hinzugenommen wird: $s\left(\frac{1}{c_g^2}\frac{\partial^3 v}{\partial t^3} - \frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial t}\right) + \frac{3G+h}{c_g^2}\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - h\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 0$. Die Gleichung ist hyperbolischen Typs und besitzt reelle Charakteristiken, entlang derer sich Störungen mit der Geschwindigkeit c_g elastischer Scherwellen ausbreiten. Man kann zeigen, dass das Material dann eine intrinsische Längenskale bekommt, und die Lokalisierung einen stationären Zustand im Bereich dieser Länge annimmt. Dies bedeutet auch, dass bei weiter vorliegender Materialinstabilität das Material dann in seinem Verformungsverhalten stabil gegenüber Störungen ist. (In: W. M. Wang, L. J. Sluys, R. de Borst: Interaction between material length scale and imperfection size for localisation phenomena in viscoplastic media, European Journal of Mechanics A/Solids 15(3), 1996, S. 447-464 wurde aus der Dispersionsrelation ein analytischer Ausdruck für eine viskose Längenskale gewonnen: $l_v = \frac{2}{3}\frac{s}{\sqrt{G\rho}}$ mit $s = \frac{\partial \sigma}{\partial \dot{\varepsilon}^{pl}}$, welche einem Grenzwert des Imaginärteils der Wellenzahl entspricht. Für die Scher-Dehnraten-Verteilung ergibt sich näherungsweise: $\dot{\gamma}(x) \approx \frac{1}{3}\dot{\gamma}_0 \bar{b} e^{-\bar{x}}\left(1+\frac{\bar{x}}{2}\right)$ mit $\bar{x} = \frac{x}{l_v}$.)

Solange das Netz viel gröber ist als die Längenskale, wird sich an dem numerischen Problem der Netzabhängigkeit nichts Wesentliches ändern. Die Verformung wird bis auf etwa ein Element lokalisieren. Durch die vorgegebene Randgeschwindigkeit $v(x = \pm\frac{b}{2}) = \pm v_0 = \pm\frac{b}{2}\dot{\gamma}_0$ und die kleinste Elementlänge ist die maximal mögliche Scherrate bestimmt ($\dot{\gamma} = 2v_0/l$). Diese wird bei einem zu groben Netz so gering sein, dass die Fließspannung auch kaum durch den viskosen Effekt beeinflusst wird.

Erst wenn das Netz fein genug ist, um eine Verformungsverteilung im Bereich der Längenskale aufzulösen, kann man eine netzunabhängige, stationäre Lösung erhalten. Dabei sei bemerkt, dass diese Längenskale, abhängig von den Materialparametern, durchaus in den subatomaren Bereich fallen kann. Und weiterhin ist diese Längenskale i. allg. nicht konstant sondern noch vom jeweiligen Verformungszustand selbst abhängig. Konkret ist die Dehnraten-Empfindlichkeit s wesentlich von der Fließspannung abhängig. Bei einem multiplikativen Separationsansatz, wie bei den meisten empirischen Materialgesetzen, würde selbst bei linearem Dehnraten-Term die Längenskale mit zunehmender Verformung abnehmen und gegen Null gehen, z.B. bei folgendem an das Johnson-Cook-Modell angelehnten Ansatz: $\sigma = (A + B\varepsilon^n)\left(1 + C\ln\left(\frac{\dot{\varepsilon}}{\dot{\varepsilon}_0}\right) + \eta\dot{\varepsilon}\right)\left(1 - \left(\frac{T-T_R}{T_m-T_R}\right)^m\right)$.

Da nicht unbedingt jedes Material visko-plastisch ist, stellt sich die grundlegende Frage: wenn alle in der Natur auftretenden Probleme korrekt gestellt sind, durch welche Mechanismen wird dann verhindert, dass das Problem einer plastischen Instabilität den Typus der Laplace-Gleichung annimmt?

PETROWSKI schrieb bzgl. des Aufretens des nicht korrekt gestellten Problems in der Physik folgendes in: "Vorlesungen über partielle Differentialgleichungen", Teubner, Leipzig, 1955: "*Daher wäre die Lösung des Cauchyschen Problems für die Laplacesche Differentialgleichung praktisch wertlos, wenn irgendwelche physikalischen Untersuchungen uns auf dieses Problem geführt hätten, obwohl eine derartige Lösung existiert. Glücklicherweise führen keine physikalischen Probleme auf das Cauchysche Problem für die Laplacesche Differentialgleichung.*" Diese bemerkenswerte Äußerung, weist aber nicht zuletzt auch darauf hin, dass es theoretisch nicht ausgeschlossen ist, dass ein derartiges Problem in der Natur existiert.

Schließlich muss man in der Physik grundsätzlich zwei völlig verschiedenartige Ebenen unterscheiden: zum einen den Bereich der Sinneserfahrungen, zu der auch die Messtechnik gehört, und zum anderen die Modellebene, welche das physikalische Weltbild ausmacht (in diesem Zusammenhang sei auf die Vorträge MAX PLANCKs hingewiesen, z.B.: "Über den Kausalbegriff in der Physik", in: Vorträge u. Erinnerungen. 5. Aufl. d. Wege zur physikalischen Erkenntnis. Volksausgabe, Hirzel, Stuttgart, 1949). Sind auf der Ebene der Sinneserfahrungen auch exakte Angaben über physikalische Größen nicht möglich, so beziehen sich deterministische Theorien auf eine Modellebene, in der die Größen eindeutig und exakt sind. Wenn sich nun Ereignisse aus dem Sinnesbereich mit Hilfe des Modells vorhersagen lassen, so betrachtet man sie, bzw. die Quellen der

Sinneseindrücke, als *kausal* bedingt. Damit kann man zumindest sagen, dass das Problem ungenauer Messungen die Modellebene nicht betrifft und lediglich die Vorhersagbarkeit (bzw. im Fall der Laplace-Gleichung die Nichtvorhersagbarkeit) von Ereignissen bedingt.

Da ein kontinuumsmechanisches Modell aber in einer homogenisierenden Weise auf Atomgitter- oder molekularen Modellen aufbaut, ist von vornherein zu fordern, dass Störungen auf kleinen Längenmaßstäben niemals das Verhalten auf einem größeren Maßstab zerstören. Würde etwas derartiges, wie im Fall der Laplace-Gleichung, in der Realität eine Rolle spielen, so würde sich damit die Anwendung eines kontinuumsmechanischen Modells prinzipiell verbieten. Denn dieses ist prinzipiell "blind" für Vorgänge auf atomarer Ebene; und würde dort eine Störung soweit anwachsen, dass sie das Gesamtverhalten dominiert, so bedeutete dies vom Standpunkt des kontinuumsmechanischen Modells eine Verletzung der Kausalität. Weiterhin müssen kontinuumsmechanische Größen auch in einer Verformungslokalisierung ein thermodynamisches Mittel darstellen. Liegt aber die Längenskale im atomaren Bereich, resultieren hieraus prinzipielle Probleme.

Sollte in der Tat jedes plastische Material auch viskose Eigenschaften haben, so bliebe zu klären, wieweit jener intrinsischen Längenskale eine physikalische Repräsentation zukommt. Alle bisher geprüften Materialmodelle haben jedoch die Eigenschaft, dass mit steigender Verformung oder Verformungsgeschwindigkeit die Längenskale gegen Null geht. Speziell das um den Mechanismus des "dislocation drag" erweiterte (fcc-) ZERILLI-ARMSTRONG-Modell (R. W. Armstrong, F. J. Zerilli: Dislocation mechanics based analysis of material dynamics behavior. Journal de Physique, Colloque C3, 1988, S. 529-534) hat eine Dehnraten-Abhängigkeit, die für $\varepsilon, \dot{\varepsilon} \to \infty$ sich mit $s \approx -\sqrt{\frac{\beta_1^2 c_0 T^3 B_1 \sqrt{\varepsilon}}{4\dot{\varepsilon}}}$ verhält und somit anscheinend gegen Null geht. Gleiches lässt sich über das Vöhringer-Kocks-Modell sagen.

Sollte diese Länge somit zwar in der Theorie der Kontinuumsmechanik aber letztlich nicht real auftreten, so hätte man durch das diskrete Atomgitter im Prinzip ein Problem vorliegen wie bei der zu groben numerischen Diskretisierung - nur ohne thermodynamisches Fundament. Eine verbliebene Möglichkeit, damit wir es doch noch mit einem korrekt gestellten und behandelbaren Problem zu tun haben, liegt in der Einbeziehung der Wärmeleitung als "homogenisierendem" Einflußfaktor.

1.4.3 Bedeutung des Trägheitsterms

Im Zusammenhang mit der Kontinuität der Lösung steht die Frage, wieweit man zur Beschreibung realer Phänomene auf einen Trägheitsterm verzichten kann. Nehmen wir an, wir hätten ein nicht korrekt gestelltes Problem vorliegen, bei welchem "Sprünge" in der Lösung auftreten. In der Realität würde das einer unendlich hohen Beschleunigung entsprechen. Dies würde ein Trägheitsterm verhindern - ähnlich wie ein Viskositätsterm das Auftreten von unendlich hohen Dehnraten unmöglich macht.

Andererseits ist die (von Null verschiedene) Dichte eines Körpers von Natur aus nicht nach unten beschränkt, so dass der Trägheitsterm in den dynam. Gleichgewichtsbedingungen fast verschwinden kann. Wenn man makroskopische Transportphänomene (z.B. Wärmeleitung) nicht mit einbezieht, so kann auch eine quasistatische Prozessführung angenommen werden. Das Problem zeigt dann praktisch keinen Unterschied zum statischen Fall.

Dennoch ist eine solche Betrachtungsweise nicht immer zulässig, wenn wir es nämlich mit einer Instabilität zu tun haben. Ein Charakteristikum einer solchen ist, dass in den Deformationsmodus Energie einfließt, welche im Körper selbst gespeichert ist, auch wenn von außen keine Energie zugeführt wird. Ein Riss ist ein gutes Beispiel für solch einen Vorgang - dieser breitet sich in jene Richtung aus, in der die freigesetzte Energie maximal ist (analog zum "Prinzip der maximalen plastischen Dissipation"). Deswegen ist es nicht sicher, ob eine quasistatische Prozessführung wirklich realisiert werden kann. Und da die Dichte immer einen endlichen Wert hat, die Beschleunigung theoretisch aber unbeschränkt ist ($\propto \frac{\partial \tau}{\partial x}$), kann auch auf den Trägheitsterm nicht a priori verzichtet werden.